Universidad Simón Bolívar
Departamento de Cómputo Científico
y Estadística
Enero-Marzo 2007

Nombre: ______________________

Carnet: ____________ Sección: ____

CO3321-CO3322. Segundo Examen Parcial, 40%.

1. La variable aleatoria X tiene distribución Poisson(λ). Se quiere probar la hipótesis nula H_0: $\lambda = 1$ contra la alternativa H_a: $\lambda = 3$. Verifique que la región de rechazo para la correspondiente prueba de Neyman-Pearson es de la forma

$$\text{RR} = \{X > c\}$$

para alguna constante c. Encuentre (aproximadamente) c para error tipo I $\alpha = .05$. ¿Cual es la potencia de la prueba para la alternativa considerada?

(10 pts)

2. La siguiente tabla muestra la densidad x y la resistencia a la ruptura y de diez tipos de madera.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0.499	0.558	0.604	0.441	0.550	0.528	0.418	0.480	0.406	0.467
y	11.1	12.7	13.1	11.5	12.4	12.6	11.1	11.7	11.0	11.4

Para estos datos se tiene $\overline{x} = 0.4951$, $\overline{y} = 11.86$, $S_{xx} = \sum(x_i - \overline{x})^2 = 0.0378$, $\sum x_i^2 = 2.489$, $S_{yy} = \sum(y_i - \overline{y})^2 = 5.344$ y $S_{xy} = \sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = 0.409$.
Ajuste una recta $y = \beta_0 + \beta_1 x$ a estos datos. Se piensa que, para estos tipos de madera, la resistencia a la ruptura aumenta con la densidad. Haga una prueba de hipótesis, a nivel 5% para H_0: $\beta_1 = 0$ contra $\beta_1 > 0$ e interprete el resultado. Indique, aproximadamente, el p-valor de su estadístico de prueba.

(10 pts)

3. Para los datos en la tabla siguiente

y	x_0	x_1	x_2	x_3
3.015	1	0.0	-1.417	-0.927
2.454	1	0.0	-1.417	-0.927
1.232	1	0.5	0.958	0.0386
1.328	1	0.5	0.958	0.0386
1.102	1	0.5	0.958	0.0386
0.217	1	-0.5	0.208	1.313
-0.635	1	0.5	-1.042	3.436
-0.093	1	-0.5	1.208	-0.386
3.473	1	0.0	-0.917	-1.776
-1.392	1	-0.5	-0.292	2.162
2.631	1	0.0	0.083	-3.475
-0.394	1	-0.5	0.708	0.463

se ha ajustado el modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \epsilon$, obteniéndose el siguiente vector de estimadores:

$$\vec{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)^t = (1.078, 1.17, -0.60, -0.712)^t$$

Sean $\vec{Y}$ el vector de respuestas y $\mathbf{X}$ la matriz de diseño (incluyendo la columna de unos). Se tiene que

$$\vec{Y}^t\vec{Y} = 41.15 \qquad \text{y} \qquad \vec{\beta}^t\mathbf{X}^t\vec{Y} = 38.6$$

Además, la matriz $(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}$ es una matriz diagonal, con diagonal $(0.0833, 0.5, 0.0927, 0.0282)$. Con esta información,

(i) Realice una prueba de hipótesis a nivel 5% para decidir si hay evidencia de que β_1 es distinto de cero. Indique, aproximadamente, el p-valor de su estadístico de prueba.

(ii) Se van a producir nuevos valores de y para $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^t = (0, 0.5, 1)^t$. Proporcione un intervalo del 95% de confianza para estas nuevas observaciones. (10 pts)

4. La tabla siguiente presenta la resistencia a la tensión del cemento producido con cuatro métodos diferentes de mezclado, haciendo cuatro pruebas para cada método de mezcla. Escriba la tabla ANOVA para estos datos y realice la prueba de hipótesis para H_0: Los efectos de los métodos de mezclado sobre la resistencia a la tensión del cemento son todos iguales. ¿Que se concluye de esta tabla? Gráfique los residuos del modelo contra $\hat{y}_{ij}$ ¿Podemos suponer que se cumplen las hipótesis estadísticas correspondientes a ANOVA?

Método de Mezcla	Resistencia a la tensión (lb/pulg^2)			
1	3129	3000	2865	2890
2	3200	3300	2975	3150
3	2800	2900	2985	3050
4	2600	2700	2600	2765

Para aligerar sus cálculos, puede usar que $\overline{y}_{1.} = 2971$, $\overline{y}_{2.} = 3156.25$, $\overline{y}_{3.} = 2933.75$, $\overline{y}_{4.} = 2666.25$, y $\overline{y}_{..} = 2931.81$

(10 pts)